

## **Tidigare prov i Matematik A. Exempel 1.**

Tillåtet hjälpmedel: Miniräknare enligt Utbildningsnämndens beslut.

Formler och uträkningar skall redovisas. Lösningar skall vara väl motiverade och lätt kunna följas.

---

---

1. Betrakta funktionen  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

- Bestäm största möjliga definitionsmängd till funktionen.
  - Bestäm funktionens nollställen.
  - Bestäm funktionens stationära punkter klassificera dem samt bestäm de intervall där funktionen är växande/avtagande.
  - Bestäm de intervall där funktionen är konvex/konkav och ange ev. inflexionspunkter.
  - Rita (översiktligt) funktionens graf. Funktionens karakteristiska enligt a) – d) skall framgå i figuren.
2. Vid konsumtionen av varorna X och Y har en person nyttofunktionen

$$U(x, y) = x^{0,25} y^{0,75}$$

Vara X kostar 1 krona per enhet och vara Y kostar 4 kr per enhet.

- Hur fördelar personen inköpen om hon disponerar 240 kr? (Utgår från att det finns ett nyttomaximum.)
  - Hur stor nytta (mätt i ”nyttoenheter”) uppnår personen i nyttomaximum?
  - Ungefär hur stor blir personens nyttoökning om hon får ytterligare 1 krona att handla för? (Nya inköpskvantiteter ska inte beräknas.)
3. Betrakta funktionen  $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
- Bestäm största möjliga definitionsområde till funktionen.
  - Bestäm ett nollställe till funktionen.
  - Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem om möjligt.
4. Betrakta funktionen  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
- Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem om möjligt.
  - Visa att funktionen har ett minsta värde (globalt minimum).
  - Ange funktionens värdemängd.

## **Exempel 2.**

1. Be trakta funktionen  $f(x) = e^{-x} + x$

- Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem.
- Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande.

- c) Bestäm de intervall där funktionen är konvex/konkav och ange ev. inflexionspunkter.
  - d) Ange funktionens värdemängd.
  - e) Rita (översiktligt) funktionens graf.
2. Vid konsumtionen av varorna X och Y har en person nyttofunktionen

$$U(x, y) = 10x^{0,8}y^{0,2}$$

Vara X kostar 5 krona per enhet och vara Y kostar 4 kr per enhet.

- a) Hur fördelar personen inköpen om hon disponerar 100 kr? (Utgå från att det finns ett nyttomaximum.)
- b) Hur stor nytta (mätt i ”nyttoenheter”) uppnår personen i nyttomaximum?
- c) Vad är värdet – tryckt i nyttoenheter – av att få ytterligare en krona att handla för? (Nya inköpskvantiteter ska inte beräknas.)

3. Betrakta funktionen  $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2}$

Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem om möjligt.

4. Betrakta funktionen  $f(x) = \ln(-x - x^2)$

- a) Bestäm största möjliga definitionsområde till funktionen.
  - b) Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem.
  - c) Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande.
  - d) Ange funktionens värdemängd.
5. Betrakta funktionen  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$  med definitionsmängden  $x^2 + y^2 \leq 25$ .

Bestäm funktionen största och minsta värde.

**Exempel 3.**

1. Betrakta funktionen  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- a) Bestäm funktionens nollställen.
  - b) Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem. Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande.
  - c) Bestäm de intervall där funktionen är konvex/konkav och ange ev. inflexionspunkter.
  - d) Ange funktionens värdemängd.
  - e) Rita (översiktligt) funktionens graf.
2. Vid konsumtionen av varorna X och Y har en person nyttofunktionen

$$U(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

Vara X kostar 4 krona per enhet och vara Y kostar 10 kr per enhet.

- a) Hur fördelar personen inköpen om hon disponerar 300 kr? (Utgå från att det finns ett nyttomaximum.)
- b) Hur stor nytta (mätt i ”nyttoenheter”) uppnår personen i nyttomaximum?
- c) Ungefär hur stor förlust – uttryckt i nyttoenheter – drabbas konsumenten av om hon har en krona mindre att handla för? (Nya inköpskvantiteter ska inte beräknas.)
3. Betrakta funktionen  $f(x, y) = 2x^2 + 4xy^2 - x$
- a) Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem om möjligt.
- b) Begränsa nu definitionsmängden till  $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$ . Bestäm funktionens största och minsta värde samt värdemängd.
4. Betrakta funktionen  $f(x) = \ln(1 + x)^2$
- a) Bestäm största möjliga definitionsmängd till funktionen.
- b) Bestäm funktionens nollställen.
- c) Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem. Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande
- d) Bestäm de intervall där funktionen är konvex/konkav och ange ev. inflexionspunkter.

**Exempel 4.**

1. Betrakta funktionen  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$
- a) Bestäm funktionens nollställen.
- b) Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem. Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande.
- c) Bestäm de intervall där funktionen är konvex/konkav och ange ev. inflexionspunkter.
- d) Rita (översiktligt) funktionens graf.
2. Vid konsumtionen av varorna X och Y har en person nyttofunktionen
- $$U(x, y) = 0,3 \ln x + 0,7 \ln y$$
- Vara X kostar 2 kr per enhet och vara Y kostar 3 kr per enhet.
- a) Hur fördelar personen inköpen om hon disponerar 60 kr? (Utgå från att det finns ett nyttomaximum.)
- b) Hur stor nytta (mätt i ”nyttoenheter”) uppnår personen i nyttomaximum?
- c) Ungefär hur stor förlust – uttryckt i nyttoenheter – drabbas konsumenten av om hon har 50 öre mindre att handla för? (Nya inköpskvantiteter ska inte beräknas.)
3. Betrakta funktionen  $f(x, y) = xy^2 - 2x^2 - y^2$

- a) Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem om möjligt.
  - b) Begränsa nu definitionsmängden till  $x^2 + y^2 \leq 8$ . Bestäm funktionens största och minsta värde samt värdemängd
4. Betrakta funktionen  $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$
- a) Bestäm funktionens nollställen.
  - b) Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem. Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande.
  - c) Bestäm de intervall där funktionen är konvex/konkav och ange ev. inflexionspunkter.

**Exempel 5.**

1. Betrakta funktionen  $f(x) = x(1-x)^4$  med definitionsmängden  $0 \leq x \leq 2$
- a) Bestäm funktionens nollställen.
  - b) Bestäm funktionens minsta och största värde.
  - c) Ange funktionens värdemängd.
  - d) Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem. Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande.
  - e) Bestäm de intervall där funktionen är konvex/konkav och ange ev. inflexionspunkter.
  - f) Rita (översiktligt) funktionens graf.

2. Vid konsumtionen av varorna X och Y har en person nyttofunktionen

$$U(x, y) = x^{0,2}y^{0,8}$$

Vara X kostar 2 krona per enhet och vara Y kostar 5 kr per enhet.

- a) Hur fördelar personen inköpen om hon disponerar 300 kr? (Utgå från att det finns ett nyttomaximum.)
- b) Hur stor nytta (mätt i ”nyttoenheter”) uppnår personen i nyttomaximum?
- d) Ungefär hur stor förändring av antalet nyttopoäng får personen – uttryckt i nyttoenheter – om hon får 50 öre mindre att handla för? (Nya inköpskvantiteter ska inte beräknas.)

3. Betrakta funktionen  $f(x, y) = \frac{7y + x^2}{1 + y^2}$ .

Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera (dem om möjligt) med hjälp av andra ordningens villkor.

4. Betrakta funktionen  $f(x, y) = x + xy^2$  med definitionsmängden  $x^2 + y^2 \leq 4$

Bestäm funktionens största och minsta värde samt värdemängd.

### **Exempel 6.**

1. Betrakta funktionen  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

- Bestäm största möjliga definitionsmängd till funktionen.
- Har funktionen något nollställe?
- Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem. Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande.
- Bestäm de intervall där funktionen är konvex/konkav och ange ev. inflexionspunkter.
- Ange funktionens värdemängd.
- Rita (översiktligt) funktionens graf.

2. Vid konsumtionen av varorna X och Y har en person nyttofunktionen

$$U(x, y) = x^{0,7} y^{0,3}$$

Vara X kostar 7 krona per enhet och vara Y kostar 3 kr per enhet.

- Hur fördelar personen inköpen om hon disponerar 510 kr? (Utgå från att det finns ett nyttomaximum.)
  - Hur stor nytta (mätt i ”nyttoenheter”) uppnår personen i nyttomaximum?
  - Ungefär hur stor förändring av antalet nyttopoäng får personen – uttryckt i nyttoenheter – om hon får 1:50 kr mindre att handla för? (Nya inköpskvantiteter ska inte beräknas.)
3. Betrakta funktionen  $f(x, y) = 2x^3 - 2y^3 + 3x^2y + 3y$ .

Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera (dem om möjligt) med hjälp av andra ordningens villkor.

4. Betrakta funktionen  $f(x, y) = e^{x-y^2}$  med definitionsmängden  $x^2 + y^2 \leq 4$

Bestäm funktionens största och minsta värde samt värdemängd.

5. Betrakta funktionen  $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 - 1)}$

Bestäm största möjliga definitionsmängd till funktionen.

### **Exempel 7.**

1. Betrakta funktionen  $f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$  med definitionsmängden  $0 \leq x \leq 7$

- Bestäm funktionens nollställen.
- Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem. Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande.
- Bestäm de intervall där funktionen är konvex/konkav och ange ev. inflexionspunkter.
- Ange funktionens värdemängd.

e) Rita (översiktligt) funktionens graf.

2. Vid konsumtionen av varorna X och Y har en person nyttofunktionen

$$U(x, y) = x^{0,6} y^{0,4}$$

Vara X kostar 3 krona per enhet och vara Y kostar 4 kr per enhet.

- Hur fördelar personen inköpen om hon disponerar 100 kr? (Utgå från att det finns ett nyttomaximum.)
- Hur stor nytta (mätt i ”nyttoenheter”) uppnår personen i nyttomaximum?
- Ungefär hur stor förändring av antalet nyttopoäng får personen – uttryckt i nyttoenheter – om hon får 75 öre mindre att handla för? (Nya inköpskvantiteter ska inte beräknas.)

3. Betrakta funktionen  $f(x, y) = 2x^3 + 6x^2y + y^3 - 12y$ .

Bestäm funktionens stationära punkter och klassificera dem (om möjligt) med hjälp av andra ordningens villkor.

4. Betrakta funktionen  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

- Bestäm  $f_{xx}(x, y)$  eller med en annan beteckning  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
- Bestäm  $f_{yy}(x, y)$  eller med en annan beteckning  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- Beräkna  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- Bestäm  $f_{yx}(x, y)$  eller med en annan beteckning  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

5. Betrakta funktionen  $f(x, y) = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$

Bestäm största möjliga definitionsmängd till funktionen.