

Kortfattade svar till tidigare prov i Matematik A.

Exempel 1.

- a) $x \neq 1$ $x \neq -1$ b) $x = 0$

c) $x = -\sqrt{3}$ lok.max. $x = 0$ terrasspkt. $x = \sqrt{3}$ lok.min.

$f(x)$ är väx. för $x \leq -\sqrt{3}$ $x \geq \sqrt{3}$

$f(x)$ är avt. för $-\sqrt{3} \leq x < -1$ $-1 < x < 1$ $1 < x \leq \sqrt{3}$

d) $x = 0$ inflex.pkt. $f(x)$ är konkav då $x < -1$ $0 \leq x < 1$ $f(x)$ konvex då $-1 < x \leq 0$ $x > 1$
- a) $x = 60$ $y = 45$ b) $\approx 48,356$ c) $\approx 0,201$
- a) $x^2 + y^2 < 1$ b) $f(0,0) = 0$ c) $(0,0)$ lok.max.pkt
- a) $(0,0)$ lok.min.pkt

b) $\left((2+4x^2)(2+4y^2) - (4xy)^2 \right) e^{2(x^2+y^2)} = 4(1+2x^2+2y^2)e^{2(x^2+y^2)} > 0$ för alla (x, y)

$2(1+2x^2)e^{2(x^2+y^2)} > 0$ för alla (x, y)

Alltså ger $(0,0)$ funktionens minsta värde: $f(0,0) = 1$ c) Värdeområde: $f(x, y) \geq 1$

Exempel 2.

- $f(x)$ avt. $x \leq 0$ $f(x)$ väx. $x \geq 0$ $x = 0$ (lok.) min.pkt.

$f(x)$ konvex i hela def.mängden. Värdeområde: $y \geq 1$
- $\begin{cases} x = 16 \\ y = 5 \end{cases}$

Ungefär 126,79 nyttopoäng i maximum.
Ungefär 1,27 nyttopoäng ytterligare för ytterligare 1 krona att handla för.
- $(0, 0)$ sadelpkt.
- $-1 < x < 0$

$f(x)$ väx. $-1 < x \leq -0,5$ $f(x)$ avt. $-0,5 \leq x < 0$ $x = -0,5$ (lok.) max.pkt.

Värdeområde: $y \leq -\ln 4$
- Största värde: $f(0,0) = 1$ Minsta värde: $f(a,b) = e^{-25}$ som antas då $a^2 + b^2 = 25$

Exempel 3.

- a) Nollställe: $x = 0$

b) $x = -1$ lok.min.pkt. $x = 1$ lok.max.pkt.

$f(x)$ är väx. för $-1 \leq x \leq 1$

$f(x)$ är avt. för $x \leq -1$ $x \geq 1$

c) $f(x)$ är konkav då $x \leq -\sqrt{3}$ $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ $f(x)$ konvex då $-\sqrt{3} \leq x \leq 0$ $x \geq \sqrt{3}$

Inflexionspunkter: $x = -\sqrt{3}$ $x = 0$ $x = \sqrt{3}$

d) Värdeområde: $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$

2. a) $x = 25$ $y = 20$ b) $\approx 21,544$ c) $\approx 0,072$

3. a) $(0,25; 0)$ lok.min.pkt. $(0; 0,5)$ sadelpkt. $(0; -0,5)$ sadelpkt.

Minsta värde: $f(0,25; 0) = -0,125$ Största värde: $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Värdeområde: $-0,125 \leq z \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. a) Definitionsmängd: $x \neq -1$ b) Nollställen: $x = 0$ $x = -2$

c) Stationär punkt saknas.

$f(x)$ är väx. för $x > -1$ $f(x)$ är avt. för $x < -1$

d) $f(x)$ är konkav då $x < -1$ $x > -1$ Inflexionspunkt saknas.

Exempel 4.

1. a) $x = 1$

b) $x = -1$ lok. max.p. $x = 1$ lok. min.p

$f(x)$ väx. $x < -1$ $x > 1$ $f(x)$ avt. $-1 < x < 1$

$f(x)$ konkav $-\sqrt{3} < x \leq 0$ $x > \sqrt{3}$ $f(x)$ konvex $x < -\sqrt{3}$ $0 < x < \sqrt{3}$

Inflexionspunkter: $x = -\sqrt{3}$ $x = 0$ $x = \sqrt{3}$

2. $\begin{cases} x = 9 \\ y = 14 \end{cases}$ b) Ungefär 2,5065 nyttopoäng i maximum.

c) Minskning ung. 0,0083 nyttopoäng.

3. a) $(0, 0)$ lok. max.pkt. $(1, 2)$ sadelpkt. $(1, -2)$ sadelpkt.

b) Minsta värde: $f(-2, 2) = f(-2, -2) = -20$ Största värde: $f(0,0) = 0$

Värdeområde: $-20 \leq f(x, y) \leq 0$

4. a) $x = -\ln 2$

b) $x = 0$ (lok.) max.pkt. $f(x)$ väx. $x < 0$ $f(x)$ avt. $x > 0$

c) $f(x)$ konkav $x < \ln 2$ $f(x)$ konvex $x > \ln 2$

Inflexionspunkt: $x = \ln 2$

Exempel 5.

1. a) $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ b) Minsta värde: $f(0) = f(1) = 0$ Största värde: $f(2) = 2$

c) Värdemängd $0 \leq f(x) \leq 2$ d) $x = 0,2$ lok. max.p $x = 1$ lok. min.p

d) $f(x)$ väx. $0 \leq x \leq 0,2$ $1 \leq x \leq 2$ $f(x)$ avt. $0,2 \leq x \leq 1$

e) $f(x)$ konkav $0 \leq x \leq 0,4$ $f(x)$ konvex. $0,4 \leq x \leq 2$ Inflexionspunkt: $x = 0,4$

2. a) $\begin{cases} x = 30 \\ y = 48 \end{cases}$ b) Ungefär 46,694 nyttopoäng i maximum. c) Minskning ung. 0,073 nyttopoäng.

3. $(0; 1)$ sadelpunkt $(0; -1)$ lok. min. punkt

4. Minsta värde: $f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; -\sqrt{\frac{7}{3}}\right) = -\frac{10}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} \approx -4,30$

Största värde: $f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}; -\sqrt{\frac{7}{3}}\right) = \frac{10}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 4,30$

Värdemängd: $-\frac{10}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} \leq f(x, y) \leq \frac{10}{3} \sqrt{\frac{5}{3}}$

Exempel 6.

1. Definitionsmängd: $x \neq 1$ Nollställen saknas.

$f(x)$ väx. $x < 0$ $x > 2$ $f(x)$ avt. $0 < x < 1$ $1 < x < 2$ $x = 0$ lok. maxpkt $x = 2$ lok. minpkt

$f(x)$ konkav $x < 1$ $f(x)$ konvex $x > 1$ Inflexionspunkt saknas.

Värdemängd: $y \leq -1$ $y \geq 3$

2. $\begin{cases} x = 51 \\ y = 51 \end{cases}$ $U(51; 51) = 51^{0,7} 51^{0,3} = 51$ nyttopoäng uppnås i maximum.

Om konsumenten får ytterligare 1:50 kr att handla för så ökar antalet nyttopoäng med ungefär 0.15.

3. $(0; \sqrt{0,5})$ sadelpunkt. $(0; -\sqrt{0,5})$ sadelpunkt

$(1; -1)$ lok. min.pkt. $(-1; 1)$ lok. max.pkt.

4. Minsta värde: $f(-0,5; \sqrt{3,75}) = f(-0,5; -\sqrt{3,75}) = e^{-4,25}$

Största värde: $f(2; 0) = e^2$

Värdemängd: $e^{-4,25} \leq f(x, y) \leq e^2$

5. Definitionsmängd: $x < -\sqrt{2}$ $-\sqrt{2} < x < -1$ $1 < x < \sqrt{2}$ $x > \sqrt{2}$

Exempel 7.

1. Nollställen: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ $x_2 = 2 + \sqrt{3}$

$f(x)$ avt. $0 < x < 1$ $5 < x < 7$ $f(x)$ väx. $1 < x < 5$ $x = 1$ lok. min.pkt. $x = 5$ lok. max.pkt.

$f(x)$ konvex $0 < x < 4 - \sqrt{5}$ $4 + \sqrt{5} < x < 7$ $f(x)$ konkav $4 - \sqrt{5} < x < 4 + \sqrt{5}$

Inflexionspunkter: $x = 4 - \sqrt{5}$ $x = 4 + \sqrt{5}$

Värdemängd: $-\frac{2}{e} \leq f(x) \leq 1$

2. $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$ $U(20; 10) \approx 15,157$ nyttopoäng uppnås i maximum.

75 öre mindre att handla för minskar den totala nyttopoängen med ungefär 0,114 nyttopoäng.

3. $(0; 2)$ lok. min.pkt. $(0; -2)$ lok. max.pkt. $(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$ sadelpkt. $(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3})$ sadelpkt.

4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

5. $x^2 + y^2 < 1$ och $(x; y) \neq (0; 0)$ (Minst en av x och y skild från noll.)