

Övningsuppgifter för att stödja repetition av gymnasiets matematik.

Har sammanställt ett antal övningsuppgifter som hjälper att repetera några viktiga delar av gymnasiets matematik. På slutet finns uppgifter som blickar vidare mot studiemomentet Matematik A.

Använd **inte räknare** för att utföra förenklingar, lösa ekvationer etc.

Allra sist i dokumentet finns kortfattade **svår** (där jag hoppas att det inte smugit sig in något fel).

Lycka till med att repetera!

Håkan L.

1. Faktorisera $25x^2 - 81$. (Skriv som en produkt. Gör uppdelningen i faktorer så långt det går.)
2. Faktorisera $1 - 4x + 4x^2$.
3. Faktorisera $4 - 64x^4$.
4. Faktorisera $ka^2 + 9k + 6ak$.
5. Faktorisera $12a^3 - 108a$.
6. Faktorisera $-x^4 + 2x^3y - x^2y^2$.
7. Faktorisera $2x^2 - 2x + 0,5$.
8. Förenkla $(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})$
9. Förenkla $\frac{a^3 - 1}{a - 1} - a^2$
10. Förenkla $\frac{1}{a - 2} + \frac{2a}{4 - a^2}$
11. Förenkla $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{a + b} - 1\right)$
12. Förenkla $\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 - 1}$
13. Förenkla $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{a - b}$
14. Förenkla $\frac{\frac{1}{y} + 1}{3 + \frac{3}{y}}$
15. Förenkla $\frac{\frac{3}{a} - 2 + \frac{a}{3}}{1 - \frac{a}{3}}$
16. Faktorisera $x^3 - x^2 + x - 1$.

17. Förenkla $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$
18. Lös ekvationen $x^2 + 2x - 3 = 0$.
19. Lös ekvationen $2 + x - x^2 = 0$.
20. Lös ekvationen $5 - 3x - 2x^2 = 0$.
21. Lös ekvationen $7x^2 + 13x - 2 = 0$.
22. Lös ekvationen $5x^2 - 6x - 2 = 0$.
23. Lös ekvationen $\sqrt{3x+1} = x-1$
24. Lös ekvationen $45 + 8x - 4x^2 = 0$
25. Skriv polynomet $p(x) = 45 + 8x - 4x^2$ som en produkt, dvs faktorisera polynomet.
26. Lös olikheten $12 - 3x \geq 6$.
27. Lös olikheten $45 + 8x - 4x^2 \geq 0$.
28. Lös olikheten $x^2 - 5x + 6 < 0$.
29. Lös olikheten $8 + 2x - x^2 \leq 0$.
30. Lös olikheten $\frac{2x(x-3)}{x+1} \leq 0$.
31. Lös olikheten $\frac{2x-3}{x-1} \geq 3-x$
32. Lös olikheten $\frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{x}$.
33. Lös olikheten $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-2}$.
34. Lös dubbelolikheten $\frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-2}$. Det innebär att bestämma de x-värden som löser både olikheten $\frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{x}$ och olikheten $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-2}$.
35. Faktorisera $x^3 - x^2 + x - 1$.
36. Lös olikheten $x^3 < x^2 - x + 1$.
37. Förenkla $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$. (Kom ihåg att inte använda räknare.)
38. Förenkla $9^{-0,5}$.
39. Förenkla $\sqrt{49} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{98}$.
40. Förenkla $0,25\sqrt{32}$.
41. Förenkla $32^{2/5}$.
42. Förenkla $\frac{32^{0,4}}{16^{-7/4}}$.

43. Förenkla $(0,04)^{-0,25}$
44. Förenkla $\sqrt[3]{\sqrt{10}}$.
45. Förenkla $\frac{(\sqrt{2})^{1,2} \cdot \sqrt[10]{8}}{(2^{0,3})^3}$.
46. Förenkla $(3^x + 3^x + 3^x)^2$.
47. Lös ekvationen $(2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1})^2 = 98$.
48. Förenkla $\frac{(x^{0,4})^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{(x^3)^{1/5}}$.
49. Förenkla $\frac{(x^{3a})^3 \cdot x^{-b}}{x^{3a+2b}}$.
50. Lös ekvationen $x^h - 1 = h$.
51. Lös ekvationen $ax(ax+b)^{-2/3} + (ax+b)^{1/3} = 0$
52. Förenkla $\ln 8 + \ln 2$ (Kom ihåg att inte använda räknare.)
53. Förenkla $\ln 8 - \ln 2$
54. Förenkla $\ln 8 - \ln \sqrt{8} - \ln 2 + \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$
55. Förenkla $\ln \frac{17}{18} + \ln \frac{18}{17}$
56. Förenkla $\ln \frac{17}{18} + \ln \frac{9}{17}$
57. Förenkla $\ln x - \ln x^2 + \ln 2x$
58. Bestäm $\frac{x}{y}$ när $\ln x = 1 + \ln y$
59. Lös ekvationen $\ln x = 1 - 3 \ln 2$
60. Lös ekvationen $2 \ln x = \ln 2x$
61. Lös ekvationen $2 \ln x = \ln 3 + \ln 12$
62. Lös ekvationen $\ln x^2 = 1 + \ln x$
63. Lös ekvationen $\ln(1-x) + \ln(1+x) = \ln 0,75$.
64. Lös ekvationen $\sqrt{3x+1} = x-1$
65. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkten $(-2; 4)$ och genom punkten $(6; -2)$
66. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkten $(4; 1)$ och är parallell med linjen $2y + 3x + 4 = 0$
67. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 7x + 2y = 13 \\ 3x - 4y = -9 \end{cases}$

68. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 230p + 450q = 1810 \\ 100p + 150q = 650 \end{cases}$$

69. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -x + y + 3z = 5 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

70. Derivera $f(x) = 7x^9$

71. Derivera $f(x) = x^n$

72. Derivera $f(x) = \sqrt{x}$

73. Derivera $f(x) = \sqrt[5]{x}$

74. Derivera $f(x) = x^\alpha$

75. Derivera $f(x) = e^x$

76. Derivera $f(x) = 2e^{-3x}$

77. Derivera $f(x) = 4x^5 + 3e^{-6x}$

78. Derivera $f(x) = 7e^{-8x+3x^3}$

79. Derivera $f(x) = (x+5)^{17}$

80. Derivera $f(x) = (x+5)^{-17}$

81. Derivera $f(x) = (x^2 + 5)^{17}$

82. Derivera $f(x) = (x^2 + 5)^{-17}$

83. Derivera $f(x) = \sqrt[17]{x^2 + 5}$

84. Derivera $f(x) = \ln x$

85. Derivera $f(x) = x^7 + \ln(x+1)$

86. Derivera $f(x) = \ln(1-x^2)$

87. Derivera $f(x) = \ln(1+x^2+x^4)$

88. Derivera $f(x) = -x + x \cdot \ln x$

89. Derivera $f(x) = \sqrt[3]{1+2x^4}$

90. Derivera $f(x) = \ln \sqrt[3]{1+2x^4}$

91. Derivera $f(x) = e^{-3x^2} \cdot \ln(1+x^2)$

92. Derivera $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

93. Derivera $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

94. Derivera $f(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$
95. Betrakta funktionen $f(x) = -x^2 + x + 6$ med definitionsmängd $-3 \leq x \leq 2$
- Bestäm funktionens största och minsta värde.
 - Ange funktionens värdemängd.
96. Betrakta funktionen $f(x) = xe^{-x}$ med definitionsmängd $-1 \leq x \leq 2$
- Bestäm funktionens största och minsta värde.
 - Ange funktionens värdemängd.
97. Betrakta funktionen $f(x) = -x^2 + x + 6$
- Bestäm största möjliga definitionsmängd till funktionen.
 - Bestäm funktionens nollställen, dvs de x-värden för vilka $f(x) = 0$.
 - Bestäm funktionens stationära punkter, dvs bestäm de punkter där förstaderivatan är noll.
 - Bestäm de intervall där funktionen är växande och de intervall där den är avtagande.
 - Klassificera de stationära punkterna, dvs bestäm för varje stationär punkt om den är en lokal maximipunkt, en lokal minimipunkt eller en terrasspunkt.
 - Bestäm de intervall där funktionen konvex och de intervall där den är konkav.
 - Bestäm funktionens inflexionspunkter.
 - Ange funktionens värdemängd.
 - Rita (översiktligt) funktionens graf.
98. Betrakta funktionen $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ och svara på frågorna 97. a) – i).
99. Betrakta funktionen $f(x) = xe^{-x}$ och svara på frågorna 97. a) – i).
100. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$ och svara på frågorna 97. a) – i).
101. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ och svara på frågorna 97. a) – i).

Svar.

- | | | |
|----------------------|--------------------|--------------------------|
| 1. $(5x-9)(5x-9)$ | 2. $(1-2x)^2$ | 3. $4(1+4x)(1-4x)$ |
| 4. $k(a+3)^2$ | 5. $12a(a+3)(a-3)$ | 6. $-x^2(x-y)^2$ |
| 7. $0,5(2x-1)^2$ | 8. h | 9. $a+1$ |
| 10. $-\frac{1}{a+2}$ | 11. -1 | 12. $\frac{x-1}{x(x+1)}$ |

13. $-\frac{1}{ab}$ 14. $\frac{1}{3}$ 15. $\frac{3-a}{a}$
16. $(x-1)(x^2+1)$ 17. $x-1$ 18. $x_1=1 \quad x_2=-3$
19. $x_1=-1 \quad x_2=2$ 20. $x_1=1 \quad x_2=-2,5$ 21. $x_1=1/7 \quad x_2=-2$
22. $x_1 = \frac{3+\sqrt{19}}{5} \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{19}}{5}$ 23. $x=5$ 24. $x_1=4,5 \quad x_2=-2,5$
25. $p(x) = -4(x-4,5)(x+2,5)$ 26. $x \leq 2$ 27. $-2,5 \leq x \leq 4,5$
28. $2 < x < 3$ 29. $x < -2 \quad x > 4$ 30. $x < -1 \quad 0 \leq x \leq 3$
31. $0 \leq x < 1 \quad x \geq 2$ 32. $0 < x \leq 1 \quad x > 2$ 33. $x < 0 \quad x > 2$
34. $x > 2$ 35. $(x-1)(x^2+1)$ 36. $x < 1$
37. 4 38. $1/3$ 39. 21
40. $\sqrt{2}$ 41. 4 42. 2^9
43. $\sqrt{5}$ 44. $10^{1/6}$ 45. 1
46. 3^{2x+2} 47. $x=1,5$ 48. x
49. x^{6a-3b} 50. $x = (1+h)^{1/h}$ 51. $x = -b/2a$
52. $4 \ln 2$ 53. $2 \ln 2$ 54. 0
55. 0 56. $-\ln 2$ 57. $\ln 2$
58. e 59. $e/8$ 60. $x=2$
61. $x=6$ 62. $x=e$ 63. $x_1=0,5 \quad x_2=-0,5$
64. $x=5$ 65. $y = -0,75x + 2,5$ 66. $y = -1,5x + 7$
67. $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 68. $\begin{cases} p=2 \\ q=3 \end{cases}$ 69. $\begin{cases} x=0 \\ y=0,8 \\ z=1,4 \end{cases}$
70. $f'(x) = 63x^8$ 71. $f'(x) = nx^{n-1}$ 72. $f'(x) = 0,5x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
73. $f'(x) = 0,2x^{-0,8}$ 74. $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ 75. $f'(x) = e^x$
76. $f'(x) = -6e^{-3x}$ 77. $f'(x) = 20x^4 - 18e^{-6x}$ 78. $f'(x) = 7(-8+9x^2)e^{-8x+3x^3}$
79. $f'(x) = 17(x+5)^{16}$ 80. $f'(x) = -17(x+5)^{-18}$ 81. $f'(x) = 17 \cdot 2x(x^2+5)^{16}$
82. $f'(x) = -17 \cdot 2x(x^2+5)^{-18}$ 83. $f'(x) = \frac{1}{17} \cdot 2x(x^2+5)^{-16/17} = \frac{2x}{17(x^2+5)^{16/17}}$
84. $f'(x) = \frac{1}{x}$ 85. $f'(x) = 7x^6 + \frac{1}{x+1}$ 86. $f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$
87. $f'(x) = \frac{2x+4x^3}{1+x^2+x^4}$ 88. $f'(x) = \ln x$ 89. $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 8x^3(1+2x^4)^{-2/3}$

$$90. \quad f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 8x^3 (1+2x^4)^{-2/3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1+2x^4)}} = \frac{8x^3}{3(1+2x^4)}$$

$$91. \quad f'(x) = -6e^{-3x} \cdot \ln(1+x^2) + e^{-3x^2} \cdot \frac{2x}{1+x^2}$$

$$92. \quad f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$93. \quad f'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$94. \quad f'(x) = \frac{4-12x^2}{(1+x^2)^3}$$

95. Största värde: $f(0,5) = 6,25$ Minsta värde: $f(-3) = -6$ Värdeområde: $-6 \leq f(x) \leq 6,25$

96. Största värde: $f(1) = \frac{1}{e}$ Minsta värde: $f(-1) = -e$ Värdeområde: $-e \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$

97. a) Största möjliga definitionsmängd utgörs av hela tallinjen.

b) Nollställen: $x_1 = 3$ $x_2 = -2$

c) Stationära punkter: $x = 0,5$

d) $x = 0,5$ är max. punkt.

e) $f(x)$ är växande för $x < 0,5$ $f(x)$ är avtagande för $x > 0,5$

f) $f(x)$ är konkav för alla x

g) Inflexionspunkt saknas.

h) Värdeområde: $f(x) \leq 6,25$

98. a) Största möjliga definitionsmängd utgörs av hela tallinjen.

b) Nollställen: $x_1 = -3$ $x_2 = 0$

c) Stationär punkt: $x_1 = -3$ $x_2 = -1$

d) $x = -3$ är lokal max. punkt. $x = -1$ är lokal min. punkt.

e) $f(x)$ är växande för $x < -3$ $x > -1$ $f(x)$ är avtagande för $-3 < x < -1$

f) $f(x)$ är konkav för $x < -2$ $f(x)$ är konvex för $x > -2$

g) Inflexionspunkt: $x = -2$

h) Värdeområde: hela tallinjen.

99. a) Största möjliga definitionsmängd utgörs av hela tallinjen.

b) Nollställe: $x = 0$

c) Stationär punkt: $x = 1$

d) $x = 1$ är max. punkt.

e) $f(x)$ är växande för $x < 1$ $f(x)$ är avtagande för $x > 1$

f) $f(x)$ är konkav för $x < 2$ $f(x)$ är konvex för $x > 2$

g) Inflexionspunkt: $x = 2$

h) Värdeområde: $f(x) \leq \frac{1}{e}$

100. a) Största möjliga definitionsmängd utgörs av hela tallinjen.

b) Nollställe: $x = 1$

c) Stationära punkter: $x = -1$ och $x = 1$

d) $x = -1$ är max. punkt. $x = 1$ är min. punkt.

e) $f(x)$ är växande för $x < -1$ $x > 1$ $f(x)$ är avtagande för $-1 < x < 1$

f) $f(x)$ är konkav för $-\sqrt{3} < x < 0$ $x > \sqrt{3}$ $f(x)$ är konvex för $x < -\sqrt{3}$ $0 < x < \sqrt{3}$

g) Inflexionspunkter: $x = -\sqrt{3}$ $x = 0$ $x = \sqrt{3}$

h) Värdeområde: $0 \leq f(x) \leq 2$

101. a) Största möjliga definitionsmängd: $x > 0$

b) Nollställe: $x = 1$

c) Stationär punkt: $x = \sqrt{e}$

d) $x = \sqrt{e}$ är max. punkt.

e) $f(x)$ är växande för $0 < x < \sqrt{e}$

f) $f(x)$ är konkav för $0 < x < e^{5/6}$

g) Inflexionspunkt: $x = e^{5/6}$

h) Värdemängd: $f(x) \leq \frac{1}{2e}$

$f(x)$ är avtagande för $x > \sqrt{e}$

$f(x)$ är konvex för $x > e^{5/6}$